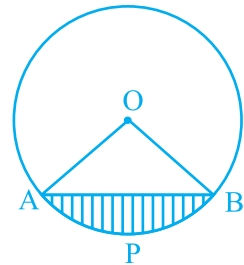
वृत्तों से संबंधित क्षेत्रफल

(A) मुख्य अवधारणाएँ और परिणाम

सरल बंद आकृतियों के परिमाप और क्षेत्रफल। वृत्त की परिधि और क्षेत्रफल। वृत्ताकार पथ (अर्थात् एक वलय) का क्षेत्रफल। वृत्त का त्रिज्यखंड और उसका केंद्रीय कोण-दीर्घ और लघु त्रिज्यखंड। वृत्तखंड-दीर्घ और लघु वृत्तखंड।

- वृत्त की परिधि $= 2\pi r$ और वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$ होता है, जहाँ r वृत्त की त्रिज्या है।
- त्रिज्याओं r_1 और r_2 $(r_1 > r_2)$ वाले दो संकेंद्रीय वृत्तों से बनने वाले वृत्ताकार पथ का क्षेत्रफल $\pi r_1^2 - \pi r_2^2 = \pi\left(r_1^2 - r_2^2\right)$ होता है।
- त्रिज्या r वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल, जिसका केंद्रीय कोण θ है, $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ होता है, जहाँ θ को डिग्री (अंशों) में मापा गया है।
- त्रिज्या r वाले एक वृत्त के त्रिज्यखंड के चाप की लंबाई, जिसका केंद्रीय कोण θ है, $\frac{\theta}{360} \times 2\pi r$ होती है, जहाँ θ को डिग्री (अंशों) में मापा गया है।
- आकृति 11.1 में दिये लघु वृत्तखंड APB का क्षेत्रफल = त्रिज्यखंड OAPB का क्षेत्रफल $-$ Δ OAB का क्षेत्रफल।
- त्रिज्या r वाले एक दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल πr^2 – संगत लघु त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल होता है।

आकृति 11.1

- त्रिज्या r वाले एक वृत्त के एक दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल πr^2 – संगत लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल होता है।

टिप्पणी: जब तक अन्यथा न कहा जाये, π का मान $\frac{22}{7}$ लिया जायेगा।

(B) बहुविकल्पीय प्रश्न

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : यदि एक वृत्त का क्षेत्रफल 154 cm^2 है, तो उसका परिमाप है

(A) 11 cm (B) 22 cm (C) 44 cm (D) 55 cm

हल : उत्तर (C)

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : यदि त्रिज्या r वाले एक वृत्त के एक त्रिज्यखंड का कोण (डिग्री में) θ है, त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल है

(A) $\frac{\pi r^2 \theta}{360}$ (B) $\frac{\pi r^2 \theta}{180}$ (C) $\frac{2\pi r \theta}{360}$ (D) $\frac{2\pi r \theta}{180}$

हल : उत्तर (A)

प्रश्नावली 11.1

दिये हुए चार विकल्पों में से सही उत्तर चुनिए :

1. यदि R_1 और R_2 वाले दो वृत्तों के क्षेत्रफलों का योग त्रिज्या R वाले वृत्त के क्षेत्रफल के बराबर हो, तो

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1^2 + R_2^2 = R^2$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) $R_1^2 + R_2^2 < R^2$

2. यदि R_1 और R_2 त्रिज्याओं वाले दो वृत्तों की परिधियों का योग त्रिज्या R वाले एक वृत्त की परिधि के बराबर हो, तो

(A) $R_1 + R_2 = R$ (B) $R_1 + R_2 > R$

(C) $R_1 + R_2 < R$ (D) R_1, R_2 और R के बीच संबंध के बारे में निश्चित रूप से कुछ नहीं कहा जा सकता।

3. यदि एक वृत्त की परिधि और एक वर्ग का परिमाप बराबर है, तो

(A) वृत्त का क्षेत्रफल = वर्ग का क्षेत्रफल

(B) वृत्त का क्षेत्रफल $>$ वर्ग का क्षेत्रफल

(C) वृत्त का क्षेत्रफल $<$ वर्ग का क्षेत्रफल

(D) वृत्त और वर्ग के क्षेत्रफलों के बीच के संबंध में निश्चित रूप से कुछ नहीं कहा जा सकता।

4. त्रिज्या r के एक अर्धवृत्त के अंतर्गत खींचे जा सकने वाले सबसे बड़े त्रिभुज का क्षेत्रफल है

(A) r^2 (B) $\frac{1}{2} r^2$ (C) $2 r^2$ (D) $\sqrt{2}\ r^2$

5. यदि एक वृत्त का परिमाप एक वर्ग के परिमाप के बराबर है, तो उनके क्षेत्रफलों का अनुपात है

(A) 22 : 7 (B) 14 : 11 (C) 7 : 22 (D) 11: 14

6. किसी स्थान पर 16 m और 12 m व्यास वाले दो वृत्ताकार पार्कों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर क्षेत्रफल का एक अकेला वृत्ताकार पार्क बनाने का प्रस्ताव है। नये पार्क की त्रिज्या होगी

(A) 10 m (B) 15 m (C) 20 m (D) 24 m

7. भुजा 6 cm वाले एक वर्ग के अंतर्गत खीचे जा सकने वाले वृत्त का क्षेत्रफल है

(A) $36\ \pi\ cm^2$ (B) $18\ \pi\ cm^2$ (C) $12\ \pi\ cm^2$ (D) $9\ \pi\ cm^2$

8. त्रिज्या 8 cm वाले एक वृत्त के अंतर्गत खींचे जा सकने वाले वर्ग का क्षेत्रफल है

(A) $256\ cm^2$ (B) $128\ cm^2$ (C) $64\sqrt{2}\ cm^2$ (D) $64\ cm^2$

9. व्यासों 36 cm और 20 cm वाले दो वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर परिधि वाले एक वृत्त की त्रिज्या है

(A) 56 cm (B) 42 cm (C) 28 cm (D) 16 cm

10. त्रिज्याओं 24 cm और 7 cm वाले दो वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर क्षेत्रफल वाले एक वृत्त का व्यास है

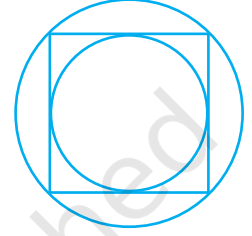
(A) 31 cm (B) 25 cm (C) 62 cm (D) 50 cm

(C) तर्क के साथ संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : क्या निम्नलिखित कथन सत्य है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

एक वृत्तखंड का क्षेत्रफल = संगत त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल – संगत त्रिभुज का क्षेत्रफल

हल : कथन सत्य नहीं है। यह केवल लघु वृत्तखंड के लिए ही सत्य है। दीर्घ वृत्तखंड के क्षेत्रफल के लिए संगत त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल में त्रिभुज का क्षेत्रफल जोड़ना पड़ेगा।

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : आकृति 11.2 में, भुजा 5 cm वाले एक वर्ग के अंतर्गत एक वृत्त खींचा गया है तथा इस वर्ग के परिगत एक अन्य वृत्त खींचा गया है। क्या यह सत्य है कि बाहरी वृत्त का क्षेत्रफल आंतरिक वृत्त के क्षेत्रफल का दुगुना है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

आकृति 11.2

हल : यह कथन सत्य है, क्योंकि आंतरिक वृत्त का व्यास 5 cm है तथा बाहरी वृत्त का व्यास = वर्ग का विकर्ण = $5\sqrt{2}$ cm है।

अत:, $A_1 = \pi\left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2$ और $A_2 = \pi\left(\frac{5}{2}\right)^2$, जिससे अनुपात $\frac{A_1}{A_2} = 2$ प्राप्त होता है।

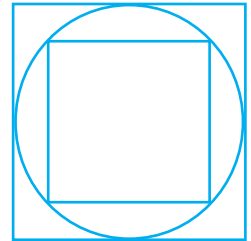
प्रश्नावली 11.2

1. क्या भुजा a cm वाले वर्ग के अंतर्गत खींचे गये वृत्त का क्षेत्रफल $\pi a^2 \text{ cm}^2$ होता है? अपने उत्तर के लिए कारण दीजिए।

2. क्या यह कहना सत्य होगा कि त्रिज्या a cm वाले एक वृत्त के परिगत वर्ग का परिमाप 8 cm है? अपने उत्तर का कारण दीजिए।

3. आकृति 11.3 में, व्यास d वाले एक वृत्त के अंतर्गत एक वर्ग खींचा गया है तथा एक अन्य वर्ग इसी वृत्त के परिगत है। क्या बाहरी वर्ग का क्षेत्रफल आंतरिक वर्ग के क्षेत्रफल का चार गुना है? उपने उत्तर का कारण दीजिए।

आकृति 11.3

4. क्या यह कहना सत्य है कि एक वृत्तखंड का क्षेत्रफल संगत त्रिज्यखंड के क्षेत्रफल से कम होता है? क्यों?

5. क्या यह कहना सत्य है कि व्यास d cm वाले एक वृत्ताकार पहिए द्वारा एक परिभ्रमण में चली गयी दूरी $2\pi d$ cm होती है? क्यों?

6. s मीटर की दूरी चलने के लिए, त्रिज्या r मीटर वाला एक वृत्ताकार पहिया $\frac{s}{2\pi r}$ चक्कर लगाता है। क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

7. एक वृत्त के क्षेत्रफल का संख्यात्मक मान उसकी परिधि के संख्यात्मक मान से अधिक होता है। क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

8. यदि त्रिज्या r वाले एक वृत्त के एक चाप की लंबाई त्रिज्या $2r$ वाले एक वृत्त के चाप की लंबाई के बराबर हो, तो पहले वृत्त के संगत त्रिज्यखंड का कोण दूसरे वृत्त के संगत त्रिज्यखंड के कोण का दोगुना होता है? क्या यह कथन असत्य है? क्यों?

9. दो भिन्न वृत्तों के बराबर लंबाइयों वाले चापों के संगत त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफल बराबर होते हैं। क्या यह कथन सत्य है? क्यों?

10. दो भिन्न वृत्तों के दो त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफल बराबर हैं। क्या यह आवश्यक है कि इन त्रिज्यखंडों के संगत चापों की लंबाइयाँ बराबर होंगी? क्यों?

11. क्या लंबाई a cm और चौड़ाई b cm $(a > b)$ वाले एक आयत के अंदर खींचे जा सकने वाले सबसे बड़े वृत्त का क्षेत्रफल πb^2 cm^2 है? क्यों?

12. दो वृत्तों की परिधियाँ बराबर हैं। क्या यह आवश्यक है कि इन वृत्तों के क्षेत्रफल भी बराबर हों? क्यों?

13. दो वृत्तों के क्षेत्रफल बराबर हैं। क्या यह आवश्यक है कि इन वृत्तों की परिधियाँ भी बराबर हों? क्यों?

14. क्या यह कहना सत्य है कि व्यास p cm वाले एक वृत्त के अंतर्गत वर्ग का क्षेत्रफल p^2 cm^2 है? क्यों?

(D) संक्षिप्त उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : उस वृत्त का व्यास ज्ञात कीजिए, जिसका क्षेत्रफल 20 cm और 48 cm व्यास वाले दो वृत्तों के क्षेत्रफलों के योग के बराबर है।

हल : यहाँ पहले वृत्त की त्रिज्या $r_1 = \frac{20}{2}$ cm = 10 cm तथा

दूसरे वृत्त की त्रिज्या $r_2 = \frac{48}{2}$ cm = 24 cm है।

अतः, इनके क्षेत्रफलों का योग $= \pi r_1^2 + \pi r_2^2 = \pi (10)^2 + \pi (24)^2 = \pi \times 676$ ...(1)

मान लीजिए नये वृत्त की त्रिज्या r cm है। अतः, इसका क्षेत्रफल $= \pi r^2$ ...(2)

इसलिए, (1) और (2) से,

$$\pi r^2 = \pi \times 676$$

या $r^2 = 676$

अर्थात् $r = 26$

अतः, नये वृत्त की त्रिज्या = 26 cm

अतः, नये वृत्त का व्यास = 2×26 cm = 52 cm

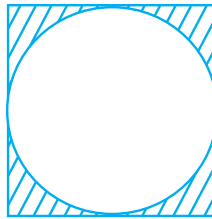
प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक 21 cm त्रिज्या वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका केंद्रीय कोण 120° है।

हल: त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\theta}{360} \times \pi r^2$

$$= \frac{120}{360} \times \frac{22}{7} \times (21)^2 \text{ cm}^2$$

$$= 22 \times 21 \text{ cm}^2$$

$$= 462 \text{ cm}^2$$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : आकृति 11.4 में, त्रिज्या 7.5 cm वाला एक वृत्त एक वर्ग के अंतर्गत खींचा गया है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ लीजिए)।

आकृति 11.4

हल: वृत्त का क्षेत्रफल $= \pi r^2$

$$= 3.14 \times (7.5)^2 \text{ cm}^2$$

$$= 176.625 \text{ cm}^2$$

स्पष्टत:, वर्ग की भुजा = वृत्त का व्यास = 15 cm

अत:, वर्ग का क्षेत्रफल $= 15^2 \text{cm}^2 = 225 \text{ cm}^2$

इसलिए, छायांकित भाग का क्षेत्रफल $= 225 \text{ cm}^2 - 176.625 \text{ cm}^2 = 48.375 \text{ cm}^2$

प्रतिदर्श प्रश्न 4 : एक 36 cm त्रिज्या वाले वृत्त के एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $54\,\pi \text{ cm}^2$ है। इस त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए कि केंद्रीय कोण (डिग्री में) θ है।

अत: $$\frac{\pi \times (36)^2 \theta}{360} = 54\,\pi$$

या $$\theta = \frac{54 \times 360}{36 \times 36} = 15$$

अब, संगत चाप की लंबाई $= \dfrac{\theta}{360} \times 2\pi r$

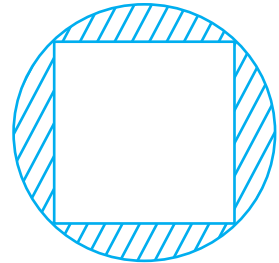
$$= \frac{15}{360} \times 2\pi \times 36 \text{ cm}$$

$$= 3\,\pi \text{ cm}$$

प्रश्नावली 11.3

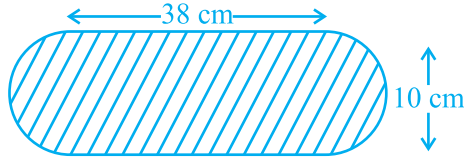
1. उस वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए, जिसकी परिधि त्रिज्याओं 15 cm और 18 cm वाले दो वृत्तों की परिधियों के योग के बराबर है।

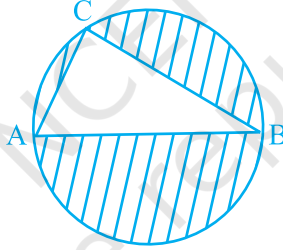
2. आकृति 11.5 में, विकर्ण 8 cm वाला एक वर्ग एक वृत्त के अंतर्गत है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

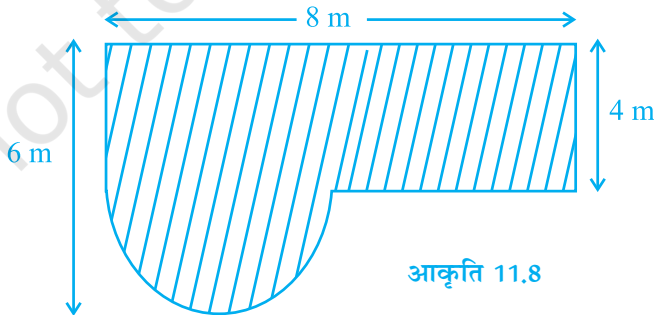
3. त्रिज्या 28 cm वाले एक वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसका केंद्रीय कोण 45° है।

आकृति 11.5

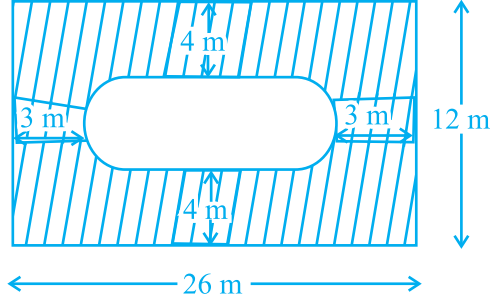
4. एक मोटर साइकिल के पहिये की त्रिज्या 35 cm है। 66 km/h की चाल रखने के लिए, पहिये को प्रति मिनट कितने चक्कर लगाने चाहिए?

5. विमाओं $20\text{m} \times 16\text{m}$ वाले एक आयताकार खेत के कोने पर एक गाय 14m लंबी रस्सी से बँधी हुई है। खेत का वह क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें गाय चर सकती है।

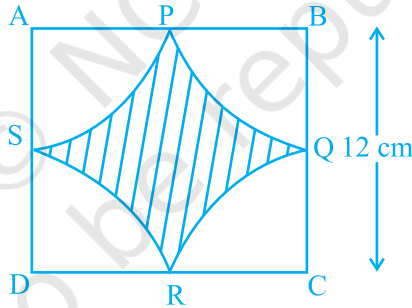
6. आकृति 11.6 में दर्शायी गयी फूलों की क्यारी (अर्धवृत्ताकार सिरों वाली) का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.6

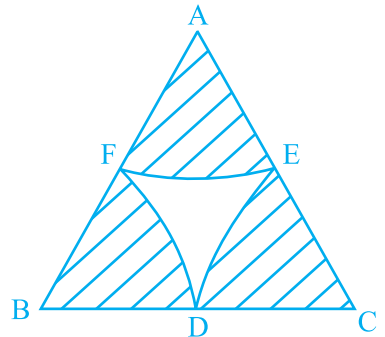
7. आकृति 11.7 में, AB वृत्त का व्यास है, AC = 6 cm और BC = 8 cm है। छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

आकृति 11.7

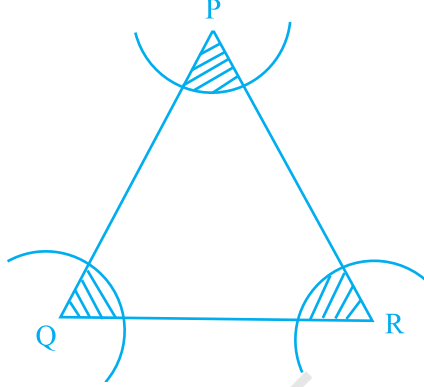
8. आकृति 11.8 में दर्शाये गये छायांकित खेत का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.8

9. आकृति 11.9 में, छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.9

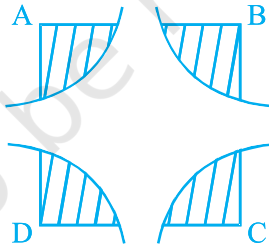
10. त्रिज्या 14 cm वाले एक वृत्त के लघु वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके संगत त्रिज्यखंड का कोण 60° है।

11. आकृति 11.10 में, छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जहाँ A, B, C और D को केंद्र मान कर खींचे गये चाप युग्म में वर्ग ABCD की क्रमशः AB, BC, CD और DA भुजाओं के मध्य-बिंदुओं P, Q, R और S पर प्रतिच्छेद करते हैं ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

आकृति 11.10

12. आकृति 11.11 में, 10 cm भुजा वाले एक समबाहु त्रिभुज के शीर्षों A, B और C को केंद्र लेकर चाप खींचे गये हैं, जो परस्पर क्रमशः BC, CA और AB के मध्य बिंदुओं D, E और F पर प्रतिच्छेद करते हैं। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

आकृति 11.11

13. आकृति 11.12 में, 14 cm की त्रिज्याएँ लेकर तथा P, Q और R को केंद्र मान कर चाप खींचे गये हैं। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.12

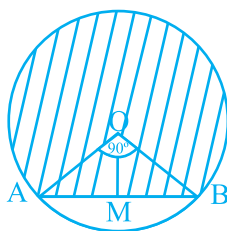
14. एक वृत्ताकार पार्क के अनुदिश बाहर की ओर 21 m चौड़ी एक सड़क है। यदि पार्क की त्रिज्या 105 m है, तो सड़क का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. आकृति 11.13 में, चतुर्भुज ABCD के A, B, C और D शीर्षों को केंद्र मानकर और 21 cm की त्रिज्या लेकर चाप खींचे गये हैं। छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.13

16. एक 20 cm लंबे तार के टुकड़े को मोड़कर एक वृत्त का चाप बनाया गया है, जो इस वृत्त के केंद्र पर 60° का कोण अंतरित करता है। वृत्त की त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(E) दीर्घ उत्तरीय प्रश्न

प्रतिदर्श प्रश्न 1 : व्यास 20 cm वाले वृत्त की एक जीवा उसके केंद्र पर 90° का कोण बनाती है। इस वृत्त के संगत दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

हल : मान लीजिए कि A B केंद्र O और 10 cm त्रिज्या वाले वृत्त की एक जीवा है (देखिए आकृति 11.14)।

आकृति 11.14

यहाँ, $\angle AOB = 90°$ है तथा हमें दीर्घ वृत्तखंड (जो छायांकित है) का क्षेत्रफल ज्ञात करना है। क्योंकि $\angle AOB = 90°$ है, इसलिए दीर्घ त्रिज्यखंड का कोण $= 360° - 90° = 270°$ है।

अत:, दीर्घ त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{270}{360} \times \pi \times (10)^2 \text{ cm}^2$

$$= \frac{3}{4} \times 3.14 \times 100 \text{ cm}^2$$

$$= 75 \times 3.14 \text{ cm}^2 = 235.5 \text{ cm}^2$$

अब, Δ OAB का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए $OM \perp AB$ खींचिए।

अब, $AM = \frac{1}{2}$ A B और $\angle AOM = \frac{1}{2} \times 90° = 45°$.

अब, $\frac{AM}{OA} = \sin 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

अत:, $AM = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}}$ cm

इसलिए, $AB = 10\sqrt{2}$ cm तथा $OM = OA \cos 45° = 10 \times \frac{1}{\sqrt{2}} \text{cm} = 5\sqrt{2}$ cm

अत:, Δ OAB का क्षेत्रफल $= \frac{1}{2}$ आधार $\times$ ऊँचाई

$$= \frac{1}{2} \times 10\sqrt{2} \times 5\sqrt{2} \text{ cm}^2 = 50 \text{ cm}^2$$

इसलिए, वाँछित दीर्घ वृत्तखंड का क्षेत्रफल

$$= 235.5 \text{ cm}^2 + 50 \text{ cm}^2 = 285.5 \text{ cm}^2$$

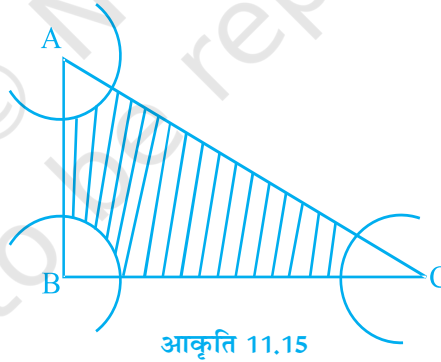
Δ OAB के क्षेत्रफल के लिए अन्य विधि:

क्योंकि ∠AOB = 90° है, इसलिए

$$\Delta \text{ OAB का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} \text{ OA} \times \text{OB}$$

$$= \frac{1}{2} \times 10 \times 10 \text{ cm}^2 = 50 \text{ cm}^2$$

प्रतिदर्श प्रश्न 2 : एक त्रिभुज ABC के A, B और C शीर्षों को केंद्र मानकर तथा त्रिज्याएँ 5 cm लेकर आकृति 11.15 में दर्शाए अनुसार चाप खींचे गये हैं। यदि AB = 14 cm, BC = 48 cm और CA = 50 cm है, तो छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए (π = 3.14 का प्रयोग कीजिए।)

आकृति 11.15

हल : कोण A वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\angle A}{360°} \times \pi r^2 = \frac{\angle A}{360°} \times \pi \times (5)^2 \text{ cm}^2$$

कोण B वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल

$$= \frac{\angle B}{360°} \times \pi r^2 = \frac{\angle B}{360°} \times \pi \times (5)^2 \text{ cm}^2$$

तथा कोण C वाले त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल $= \frac{\angle C}{360°} \times \pi \times (5)^2 \text{ cm}^2$

अत:, तीनों त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफलों (cm^2 में) का योग

$$= \frac{\angle A}{360°} \times \pi \times (5)^2 + \frac{\angle B}{360°} \times \pi \times (5)^2 + \frac{\angle C}{360°} \times \pi \times (5)^2$$

$$= \frac{\angle A + \angle B + \angle C}{360°} \times 25\,\pi$$

$$= \frac{180°}{360°} \times 25\,\pi \quad (\text{क्योंकि } \angle A + \angle B + \angle C = 180°)$$

$$= 25 \times \frac{\pi}{2} = 25 \times 1.57 = 39.25$$

अब, ΔABC का क्षेत्रफल ज्ञात करने के लिए हम ज्ञात करते हैं:

$$s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{48+50+14}{2} \text{ cm} = 56 \text{ cm}$$

हीरोन के सूत्र द्वारा,

$$\text{ar (ABC)} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \sqrt{56 \times 8 \times 6 \times 42} \text{ cm}^2$$

$$= 336 \text{ cm}^2$$

अत: छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल = त्रिभुज ABC का क्षेत्रफल – तीनों त्रिज्यखंडों का क्षेत्रफल

$$= (336 - 39.25) \text{ cm}^2 = 296.75 \text{ cm}^2$$

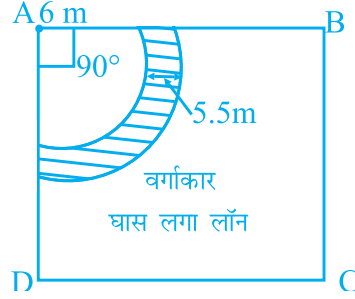
ar (ABC) के लिए वैकल्पिक विधि

यहाँ $AB^2 + BC^2 = (14)^2 + (48)^2 = 2500 = (50)^2 = (CA)^2$

अत:, $\angle B = 90°$ है। (पाइथागोरस प्रमेय के विलोम द्वारा)

इसलिए, $\text{ar (ABC)} = \frac{1}{2} \text{ AB} \times \text{BC} = \frac{1}{2} \times 14 \times 48 \text{ cm}^2 = 336 \text{ cm}^2$

प्रतिदर्श प्रश्न 3 : भुजा 20 m वाले एक वर्गाकार घास लगे लॉन ABCD के एक कोने पर 6m लंबी एक रस्सी से एक बछड़ा बँधा हुआ है। यदि रस्सी की लंबाई 5.5 m बढ़ा ली जाये, तो लॉन के उस क्षेत्रफल में वृद्धि ज्ञात कीजिए, जिसमें बछड़ा घास चर सकता है।

हल : मान लीजिए कि वर्गाकार लॉन के कोने A पर बछड़ा बँधा हुआ है (देखिए आकृति 11.16)।

आकृति 11.16

तब, क्षेत्रफल में वृद्धि = केंद्रीय कोण 90° वाले और त्रिज्याओं 11.5 m (= 6 m + 5.5 m) और 6 m वाले त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफलों का अंतर, जो आकृति में छायांकित दर्शाया गया है।
अत:, क्षेत्रफल में वाँछित वृद्धि

$$= \left[\frac{90}{360}\times\pi\times11.5^2 - \frac{90}{360}\pi\times6^2\right]\text{m}^2$$

$$= \frac{\pi}{4}\times(11.5+6)\ (11.5-6)\,\text{m}^2$$

$$= \frac{22}{7\times4}\times17.5\times5.5\,\text{m}^2$$

$$= 75.625\ \text{m}^2$$

प्रश्नावली 11.4

1. किसी वृत्ताकार खेल के मैदान का क्षेत्रफल 22176 m^2 है। इस मैदान पर 50 रु प्रति मीटर की दर से बाड़ लगवाने का व्यय ज्ञात कीजिए।

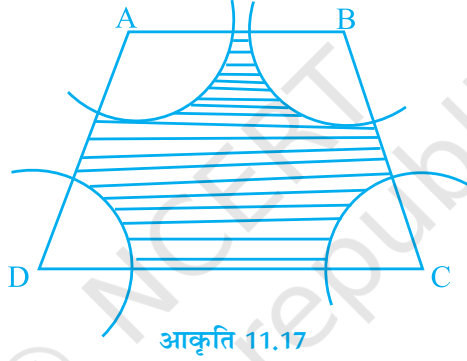
2. किसी ट्रैक्टर के अगले और पिछले पहियों के व्यास क्रमश: 80 cm और 2 m हैं। ज्ञात कीजिए कि पिछले पहिए द्वारा उतनी दूरी तय करने में कितने चक्कर लगाने होंगे, जितनी दूरी अगला पहिया 1400 चक्कर लगाने पर तय करता है।

3. एक त्रिभुजाकार खेत की भुजाएँ 15 m, 16 m और 17 m हैं। इस खेत में चरने के लिए, इसके तीनों कोनों से एक गाय, एक भैंस और एक घोड़े को अलग-अलग 7 m लंबी रस्सियों से बाँध दिया गया है। खेत के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसमें ये तीनों पशु चर नहीं पाएँगे।

4. त्रिज्या 12 cm वाले वृत्त के उस वृत्तखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, जिसके संगत त्रिज्यखंड का केंद्रीय कोण 60° है ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

5. एक वृत्ताकार तालाब का व्यास 17.5 m है। इसके अनुदिश बाहर की ओर 2 m चौड़ा एक पथ बना हुआ है। 25 रु प्रति वर्ग मीटर की दर से इस पथ के निर्माण की लागत ज्ञात कीजिए।

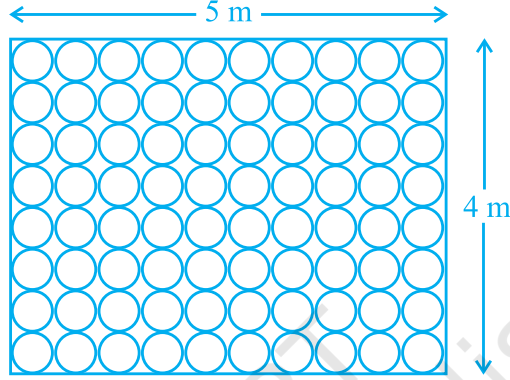
6. आकृति 11.17 में, ABCD एक समलंब है, जिसमें AB || DC, AB = 18 cm, DC = 32 cm तथा AB और DC के बीच की दूरी = 14 cm है। यदि A, B, C और D को केंद्र मानकर त्रिज्याओं 7 cm के चाप खींचे गये हैं, तो इस आकृति के छायांकित क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.17

7. बराबर त्रिज्या 3.5 cm वाले तीन वृत्त इस प्रकार खींचे गये हैं कि इनमें से प्रत्येक अन्य दो वृत्तों को स्पर्श करता है। इन वृत्तों से परिबद्ध क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

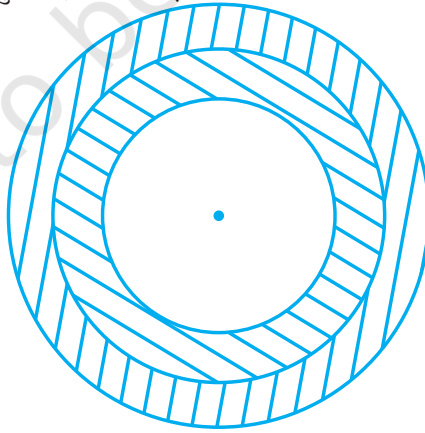
8. त्रिज्या 5 cm वाले वृत्त के उस त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिसके संगत चाप की लंबाई 3.5 cm है।

9. बराबर त्रिज्या 7 cm त्रिज्या वाले चार वृत्ताकार गत्ते के टुकड़ों को एक कागज पर इस प्रकार रखा गया है कि प्रत्येक टुकड़ा अन्य दो टुकड़ों को स्पर्श करता है। इन टुकड़ों के बीच में परिबद्ध भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

10. 784 cm^2 क्षेत्रफल वाले एक वर्गाकार गत्ते की शीट पर, अधिकतम माप की चार सर्वांगसम वृत्ताकार प्लेटें इस प्रकार रखी गयी हैं कि प्रत्येक वृत्ताकार प्लेट अन्य दो प्लेटों को स्पर्श करती है तथा वर्गाकार शीट की प्रत्येक भुजा दो वृत्ताकार प्लेटों को स्पर्श करती है। वर्गाकार शीट के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो वृत्ताकार प्लेटों द्वारा ढका नहीं गया है।

11. किसी कमरे के फर्श की विमाएँ 5 m × 4 m हैं और इस पर वृत्ताकार टाइलें लगायी जाती हैं, जिनमें से प्रत्येक का व्यास 50 cm है, जैसा कि आकृति 11.18 में दर्शाया गया है। फर्श के उस भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जिस पर टाइल नहीं लगी हैं ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

आकृति 11.18

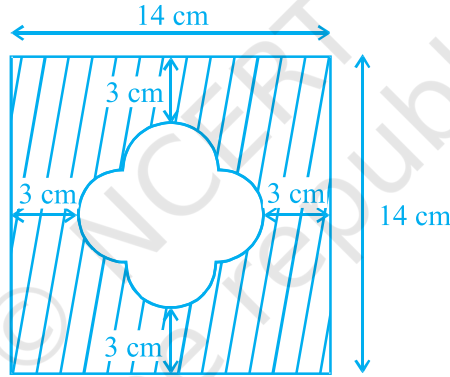
12. एक समचतुर्भुज के सभी शीर्ष एक वृत्त पर स्थित हैं। इस समचतुर्भुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए, यदि वृत्त का क्षेत्रफल 1256 cm^2 है ($\pi = 3.14$ का प्रयोग कीजिए)।

13. किसी धनुर्विद्या (या तीरंदाजी) लक्ष्य के तीन क्षेत्र हैं, जो आकृति 11.19 में दर्शाए अनुसार तीन संकेंद्रीय वृत्तों से बने हैं। यदि इन संकेंद्रीय वृत्तों के व्यास 1 : 2 : 3 के अनुपात में हैं, तो इन तीनों क्षेत्रों के क्षेत्रफलों का अनुपात ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.19

14. एक घड़ी की मिनट वाली सुई की लंबाई 5 cm है। प्रातः 6 : 05 बजे से प्रातः 6 : 40 बजे तक के समय काल में इस सुई द्वारा तय किये गये (या घूमे गये) क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

15. किसी वृत्त के 200° केंद्रीय कोण वाले एक त्रिज्यखंड का क्षेत्रफल 770 cm^2 है। इस त्रिज्यखंड के संगत चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

16. त्रिज्याओं 7 cm और 21 cm वाले दो वृत्तों के दो त्रिज्यखंडों के केंद्रीय कोण क्रमशः 120° और 40° हैं। इन दोनों त्रिज्यखंडों के क्षेत्रफल तथा साथ ही संगत चापों की लंबाई ज्ञात कीजिए। आप क्या देखते हैं?

17. आकृति 11.20 में, दिये छायांकित भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

आकृति 11.20

18. 176 m की दूरी तय करने (घूमने) में, 1.54 m^2 क्षेत्रफल वाले एक वृत्ताकार पहिये द्वारा लगाये जाने वाले चक्करों की संख्या ज्ञात कीजिए।

19. वृत्त की उस जीवा द्वारा निर्मित दोनों वृत्तखंडों के क्षेत्रफलों का अंतर ज्ञात कीजिए, जिसकी लंबाई 5 cm है और जो केंद्र पर 90° का कोण अंतरित करती है।

20. त्रिज्या 21 cm वाले एक वृत्त के 120° कोण वाले त्रिज्यखंड और उसके संगत दीर्घ त्रिज्यखंड के क्षेत्रफलों का अंतर ज्ञात कीजिए।